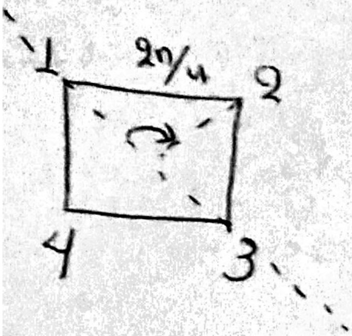
Αλγεβρικές   23/3   1



• $n = 2k$ $(1, 2, 3, 4)$

$$\frac{n-2}{2} + \frac{n-2}{2}$$

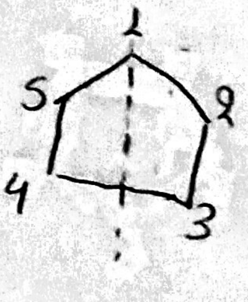
$$\frac{2k-2}{2} = k-1 \quad \text{κορυφές}$$

Συμμετρία με άξονα την διαγώνιο $(1, k+1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & 2k \\ 1 & 2k & 2k-1 & & k+2 & k+1 & k & & 2 \end{pmatrix} = g$$

Στροφή κατά $\frac{2\pi}{n}$ $f = (1, 2, 3, \dots, n)$

• $n = 2k+1$



$n-1$ μετακινούνται

||

$2k = \begin{cases} k & \text{από την μια μεριά} \\ k & \text{από την άλλη} \end{cases}$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & k+2 & k+3 & \cdots & n \\ 1 & n & & & k+3 & k+2 & k+1 & k & & 2 \end{pmatrix}$$

f στροφή κατά $\frac{2\pi}{n}$ $f = (1, 2, 3, \dots, n)$

Το σύνολο των συμμετριών του κανονικού ν-γώνου συμβολίζεται D_ν και περιέχει 2ν στοιχεία. Αποτελεί ομάδα. Καλείται <u>Διεδρική</u> και περιγράφεται $D_\nu = \{1, f, f^2, \dots, f^{\nu-1}, g, fg, f^2g, \dots, f^{\nu-1}g\}$

$o(f) = \nu$, $o(g) = 2$ και $gf^ig = f^{-i}$

<u>Άσκηση</u> (Για το σπίτι)

Να βρεθεί το στοιχείο gf^2gf^3gf στην D_5

<u>Σύμπλοκα</u>

Υποομάδες της $\mathbb{Z}$: $k\mathbb{Z} = \{\text{πολλ/σια του } k\}$

Η $\mathbb{Z}_k$ ορίζεται από μια σχέση ισοδυναμίας: $n \sim m \Leftrightarrow n - m \in k\mathbb{Z}$

Η $\mathbb{Z}_k$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης.

$$\underbrace{[0] = k\mathbb{Z}, \quad [1] = 1 + k\mathbb{Z}, \quad \dots, \quad [k-1] = k-1 + k\mathbb{Z}}_{\text{Σύμπλοκα στην } \mathbb{Z} \text{ ως προς την } k\mathbb{Z}}$$

Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{Z} = [0] \sqcup [1] \sqcup \dots \sqcup [k-1] =$

$= k\mathbb{Z} \sqcup (1 + k\mathbb{Z}) \sqcup \dots \sqcup ((k-1) + k\mathbb{Z})$

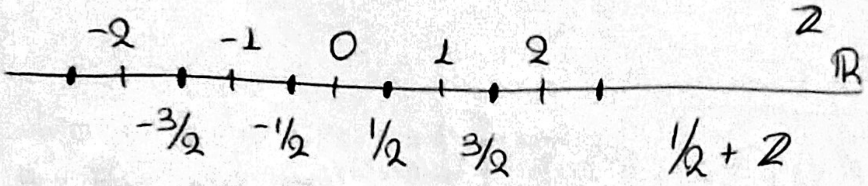
ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω O ομάδα και $Y \leq O$. Αν $a \in O$ τότε το σύνολο $Ya = \{ga \mid g \in Y\}$ καλείται δεξί σύμπλοκο ως προς Y και a.

Αριστερό σύμπλοκο $aY = \{ag \mid g \in Y\}$

Παράδειγμα

1) $(\mathbb{R}, +)$ και $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$. Το σύμπλοκο $\mathbb{Z} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \mathbb{Z} = \{k + \frac{1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$



2) $O = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$H \leq O$: $H = \{0\} \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1)\}$

Να βρω τα σύμπλοκα.

Λύση

$\underbrace{(0,0) + H}_{= H}$, $\underbrace{(0,1) + H}_{= H}$ (αφού $(0,0), (0,1) \in H$ πράξη κλειστή)

$(1,0) + H = \{(1,0), (1,1)\}$
$(1,1) + H = \{(1,1), (1,0)\}$
που είναι ίσα.

Οπότε έχω μόνο 2 σύμπλοκα. Άρα $O = H \sqcup ((1,0) + H)$

3) Σ_3 και $H = \langle f \rangle = \{1, f, f^2\}$ Βρες σύμπλοκα

$\Sigma_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}$

Λύση

Σ_3 όχι αβελιανή $\Rightarrow$ σύμπλοκα διαφορετικά

Αριστερά σύμπλοκα: $gH = \{g, gf, gf^2\}$

$gfg = f^2 \Rightarrow gfg^2 = f^2g \Rightarrow gf = f^2g$

Άρα $gH = \{g, f^2g, fg\}$

$fgH = gH = f^2gH$

Οποτε $\Sigma_3 = H \sqcup fgH$

Δεξιά σύμπλοκα: $Hg = \{g, fg, f^2g\}$ (Παρατηρώ ότι $gH = Hg$ (έτυχε))

$\Sigma_3 = H \sqcup Hg$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω H υποομάδα της O. Ορίζουμε την σχέση $\forall a, b \in O$

$a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ $(a - b \in k\mathbb{Z})$. Η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας και η κλάσεις ισοδυναμίας είναι ακριβώς τα δεξιά σύμπλοκα Hb $\forall b \in O$. Δηλαδή $O = \bigcup_{b \in O} Hb$

Προσοχή $ab^{-1} \in H \Leftrightarrow \exists h \in H$ ώστε $ab^{-1} = h \Rightarrow a = hb \in Hb \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in Hb$

$ab^{-1} \in H \Rightarrow a \in Hb$

$a \in hb \Rightarrow \underset{\text{Ⅰ} a}{Ha} \ni a = hb \Rightarrow hb \in Ha \Rightarrow h^{-1}hb \in h^{-1}Ha$

Αν $h \in H \Rightarrow hH = H = Hh$

$hH = \{hg \mid g \in H\} = H$
$\quad \| $
$\quad g' \mid g' \in H$

$Hh = \{gh \mid g \in H\} = H$
$\quad \|$
$\quad g'' \mid g'' \in H$

αφού $h^{-1} \in H$ $\Longrightarrow$

$\Rightarrow h^{-1}hb \in Ha \Rightarrow b \in Ha$

Συνεπώς έχουμε $ab^{-1} \in H \Longleftrightarrow \begin{cases} a \in Hb \\ b \in Ha \end{cases}$

$\left(a - b \in k\mathbb{Z} \quad \text{τότε} \quad a \in [b] \ \text{ή} \ b \in [a] \right)$

<u>Πόρισμα</u>

Έστω $H \leq G$: α) $Ha = Hb \Leftrightarrow b \in Ha \Leftrightarrow a \in Hb \Leftrightarrow ba^{-1} \in H \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ab^{-1} \in H$

β) $Ha = Hb$ ή $Ha \cap Hb = \emptyset$

γ) Αν $Ha \neq Hb$ τότε $|Ha| = |Hb|$

δ) Το πλήθος των διακεκριμένων δεξιών συμπλόκων ισούται με το πλήθος των διακεκριμένων αριστερών.

$\boxed{\text{Απόδειξη}}$

Επειδή τα σύμπλοκα δημιουργούνται από τη σχέση ισοδυναμίας
$a \sim b \Leftrightarrow a b^{-1} \in H$
Οι ιδιότητες α) και β) έρχονται από τις ιδιότητες των σχέσεων ισοδυναμίας

1γ). Αρκεί να δείξουμε ότι $|H| = |Ha| \ \forall a \in G$

Ορίζουμε $\varphi : H \to Ha$ Αρκεί φ 1-1 και επί
$h \mapsto ha$

$ha = h'a \Rightarrow haa^{-1} = h'aa^{-1} \Rightarrow h = h'$

Το επί προφανές
Το ίδιο και για $|H| = |aH|$

1δ) Η G έχει κ δεξιά σύμπλοκα

$G = H \sqcup Ha_2 \sqcup \dots \sqcup Ha_{k-1}$ ξένα σύμπλοκα
$\downarrow \psi$
$G = H \sqcup a_1 H \sqcup \dots \sqcup a_{k-1} H$ (*)

$a_i H = a_j H \Leftrightarrow a_j^{-1} a_i \in H \Leftrightarrow Ha_i = Ha_j$

Δηλαδή η ψ με τύπο $\psi(Ha_i) = a_i H$ είναι 1-1 και επί

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ Lagrange

Η τάξη κάθε υποομάδας μιας ομάδας διαιρεί την τάξη της ομάδας

$H \leq G \Rightarrow |H| \,/\, |G|$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $H \leq G$. Ορίζουμε τον δείκτη της H στο G $[G:H]$ να είναι το πλήθος των δεξιών ή αριστερών συμπλόκων ως προς H.

Πόρισμα

Από το προηγούμενο(*) $|G| = \underbrace{|H|}_{\text{πλήθος}} \underbrace{[G:H]}_{\text{πλήθος συμπλόκων}}$

Παράδειγμα

1) $k\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \Rightarrow [\mathbb{Z}:k\mathbb{Z}]$: το πλήθος των συμπλόκων: $k\mathbb{Z}, 1+k\mathbb{Z}, \dots, (k-1)+k\mathbb{Z}$

$[\mathbb{Z}:k\mathbb{Z}] = k = |\mathbb{Z}_k|$

Από Lagrange $\underset{\infty}{|\mathbb{Z}|} \underset{=}{=} \underset{\infty}{|k\mathbb{Z}|} \; \underset{k}{[\mathbb{Z}:k\mathbb{Z}]}$ (Γενικά ο Lagrange ισχύει για πεπερασμένα σύνολα)

2) Σ_3 και $H = \langle \rho \rangle$

$[\Sigma_3 : H] = \frac{|\Sigma_3|}{|H|} = \frac{6}{3} = 2$

$H' = \langle g \rangle \qquad [\Sigma_3 : H'] = \frac{6}{2} = 3$

3) $[\mathbb{Q}:\mathbb{Z}] = \frac{|\mathbb{Q}|}{|\mathbb{Z}|}$ (δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω τον τύπο αφού έχω $\frac{\infty}{\infty}$)

Ας "μετρήσουμε" τα διακεκριμένα σύμπλοκα.

$\frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ με $0 \leq \frac{a}{b} < 1$ με $a \in \mathbb{Z}$ και $b \in \mathbb{N}^*$

Υπάρχουν άπειροι μορφής $\frac{1}{p}$ με p πρώτος

Άρα $[\mathbb{Q} : \mathbb{Z}] = \infty$

Πόρισμα

Έστω $|G| = k$. Τότε $a^k = 1 \ \forall a \in G \iff o(a) \mid k$

$\boxed{\text{Απόδειξη}}$

Έστω $H = \langle a \rangle \leq G \Rightarrow |H| \,/\, |G| = k \Rightarrow o(a) \mid k \iff a^k = 1$